**BAB III**

**KAITAN ANTARA TEORI GROUP DENGAN**

**PERMAINAN RUBIK’S CUBE 3×3×3**

1. **Operasi pada Rubik’s Cube**

**Definisi 3.1** Enam sisi Rubik’s Cube dinotasikan dengan huruf pertama posisi sisi-sisi tersebut dalam bahasa Inggris.

|  |  |
| --- | --- |
| * , untuk sisi yang menghadap depan (*front*)
* , untuk sisi yang menghadap kanan (*right*)
* , untuk sisi yang menghadap belakang (*back*)
* , untuk sisi yang menghadap kiri (*left*)
* , untuk sisi yang menghadap atas (*up*)
* , untuk sisi yang menghadap bawah (*down*)
 | C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\arah.png**Gambar 3.1** Notasi Rubik’s Cube |

**Definisi 3.2** Rotasi pada Rubik’s Cube dinotasikan sebagi berikut.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\F.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\F'.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\F2.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\R.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\R'.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\R2.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\U.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\U'.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\U2.png | C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\B.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\B'.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\B2.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\L.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\L'.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\L2.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\D.png C:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\d'.pngC:\Documents and Settings\aLma\My Documents\REVOLUSI\d2.png |

**Gambar 3.2** Rotasi pada Rubik’s Cube

Catatan:

*Middle layer moves tidak didefinisikan karena gerakan-gerakan tersebut adalah hasil dari rotasi (searah) dua layer luar yang bersesuaian dengannya.*

**Definisi 3.3** Didefinisikan*operasi terurut* dua rotasi dengan menyatakan bahwa menotasikan rentetan rotasi dimana rotasi dikerjakan lebih dulu, kemudian dilanjutkan dengan mengerjakan rotasi .

Dengan operasi terurut kita dapat membentuk rentetan rotasi dengan panjang berapapun.

**Invers pada Rubik’s Cube**

Ketika tangan kita memegang sisi bagian depan Rubik’s Cube dan merotasikannya 90° searah jarum jam (menerapkan gerakan ), kita dapat membatalkan efek dari gerakan tersebut dengan memutar sisi yang sama 90° berlawanan arah jarum jam (menerapkan gerakan ). Gerakan yang saling membatalkan tersebut disebut gerakan yang *saling invers*.

  

**Gambar 3.3** Invers Gerakan Tunggal

Setiap gerakan pada permainan ini memiliki balikan atau invers. Tidak hanya untuk gerakan tunggal, efek dari rentetan rotasi juga dapat dibatalkan. Contohnya efek dari rotasi dapat dibatalkan dengan menerapkan kemudian diikuti .

    

**Gambar 3.4** Invers Rentetan Gerakan

Dalam bentuk umum, sesuai dengan Proposisi 2.1 (hal.50), jika adalah sebarang operasi yang memiliki invers berturut-turut , maka

.

Dalam permainan Rubik’s Cube sering ditemukan rentetan rotasi tanpa tanda invers yang ketika diterapkan saling membatalkan, contohnya dengan .

 

**Gambar 3.5** *Hidden Invers*

**Definisi 3.4** Jika adalah sebuah rentetan gerakan, maka *rentetan terreduksi* adalah rentetan rotasi yang diperoleh dengan menghilangkan semua rentetan dua elemen; dimana elemen tersebut bersebelahan dengan inversnya.

**Pangkat pada Rubiks Cube**

Gerakan dapat ditulis , dengan maksud gerakan diulang sebanyak tiga kali. Bentuk pangkat tersebut juga berlaku untuk operasi yang terdiri lebih dari satu gerakan. Jadi jika kita ingin menerapkan operasi , artinya kita menerapkan berulang-ulang sebanyak lima kali, dan dapat ditulis sebagai .



**Gambar 3.6**



**Gambar 3.7**

Catatan:

Pada *software* Rubik’s Cube Simulator *input* notasi pangkat ditulis , dan mengggunakan notasi komposisi *left*-*to*-*right*.

**Identitas pada Rubik’s Cube**

Rotasi yang tidak menghasilkan perubahan apapun pada *cube*, yaitu membiarkan *cube* tetap pada posisi sebagaimana sebelum dirotasikan, disebut *rotasi identitas* dan dinotasikan dengan ***I***. Contoh rotasi identitas adalah dan . Selain rotasi-rotasi tunggal tersebut, terdapat rentetan rotasi yang tidak memberikan efek apapun terhadap *cube*. Contohnya dan .



**Gambar 3.8**



**Gambar 3.9**

**Hukum Komutatif pada Rubik’s Cube**

Dalam permainan rubik, rotasi yang dilakukan dengan urutan berbeda tidak selalu menghasilkan efek yang sama, dengan kata lain rotasi pada Rubik’s Cube tidak bersifat komutatif. Contoh sederhananya adalah dan .

  

**Gambar 3.10**

  

**Gambar 3.11**

Namun ada pula urutan gerakan yang berbeda namun memiliki efek yang sama, contohnya dan .

****  **** ****

**Gambar 3.12**

****   

**Gambar 3.13**

Cara mudah untuk melihat apakah dua operasi memiliki efek berbeda atau sama adalah dengan mengoperasikan salah satunya dengan invers yang lain; jika operasinya tidak menghasilkan identitas maka kedua permutasi tersebut pasti berbeda. Jadi jika kita ingin melihat bahwa dan tidak komutatif kita hanya perlu melihat bahwa . Rangkaian gerakan disebut *komuter* dari dan .

1. **Grup Rubik Bebas**

**Proposisi 3.1** Himpunan dengan elemen semua rentetan terreduksi berhingga dari rotasi dan invers adalah sebuah grup di bawah operasi terurut. Grup ini dinotasikan dengan (dibaca “*frak-G-R*”) dan disebut *Grup Rubik’s Bebas*.

Bukti:

1. Untuk semua , berlaku dengan definisi operasi terurut.
2. Terdapat rotasi identitas , sedemikian hingga untuk setiap berlaku .
3. Untuk setiap , terdapat sedemikian hingga .

Proposisi 3.1 mendefinisikan sebuah grup dengan order tak-hingga. Karena grup tersebut menggambarkan kombinasi rotasi yang diterapkan pada sisi-sisi Rubik’s Cube, bukan susunan warna *facet*-nya.

Sebagaimana telah dijelaskan pada Bab II, Rubik’s Cube memiliki 54 *facet*. Jika *facet* tersebut diberi indeks angka mulai 1 sampai 54 seperti pada Gambar 3.14, kita dapat mendefinisan grup aksi dari pada himpunan *facet* tersebut.



**Gambar 3.14** Indeks *Facet*

**Definisi 3.5** adalah grup aksi dengan , , dan ; dimana adalah indeks *facet* yang dibawa oleh rentetan rotasi .

Grup aksi di atas mendefinisikan homomorfisma dari ke . Grup aksi tersebut hanya merupakan subgrup dari yang mana akan dijelaskan pada bahasan berikutnya.

1. **Posisi *Edge* dan *Corner Subcube***

**Definisi 3.6**  adalah himpunan semua *edge subcube*, dan adalah himpunan semua *corner subcube*.

Jika diperhatikan, setiap rentetan rotasi yang dilakukan pada *cube* akan memetakan *edge subcube* ke *edge subcube*, dan *corner subcube* ke *corner subcube*. Kita dapat menandai setiap *edge subcube* dengan indeks mulai 1 sampai 12, dan setiap *corner subcube* dengan indeks mulai 1 sampai 8; yakni dan .

****

**Gambar 3.15** Pelabelan *Edge* dan *Corner*

Misalkan beraksi pada dengan

, ,

dimana adalah indeks dari posisi *edge* yang dibawa oleh . Dan misalkan beraksi pada dengan

, ,

dimana adalah indeks dari posisi *corner* yang dibawa oleh . Diperoleh dua homomorfisma dan .

Rotasi yang dihasilkan dipetakan kepada permutasi pada dan sebagai berikut.

:

|  |  |
| --- | --- |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

:

|  |  |
| --- | --- |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

**Teorema 3.1**  dan merupakan fungsi surjektif.

Bukti:

Harus ditunjukkan adanya transposisi dua *corner* yang bersebelahan pada C. Berdasarkan simetri pada *cube*, jika terdapat transposisi sepasang *corner* yang bersebelahan maka kita dapat mentransposisikan semua pasangan *corner* yang bersebelahan. Hal ini akan memenuhi pembuktian untuk , karena sebarang permutasi dapat dituliskan sebagai perkalian transposisi *corner* yang bersebelahan. Jika , bersebelahan, dan bersebelahan, maka . Lebih lanjut, jika bersebelahan dengan maka . Sebuah *corner* tidak mungkin memiliki lebih dari dua buah *corner* di antara dirinya dan sebarang *corner* lain sehingga pembuktian ini memenuhi semua kasus yang mungkin terjadi. Pembuktian ini juga berlaku pada kasus . Dengan demikian terbukti bahwa dan merupakan fungsi surjektif

Contoh:

*

*

 .

 dan di atas hanya menunjukkan posisi *edge* dan posisi *corner* yang saling berdiri sendiri. Untuk menunjukkan posisi *edge* dan *corner* secara bersamaan (berkaitan) perhatikan fungsi berikut.

**Definisi 3.7** Didefinisikan dengan .

**Proposisi 3.2**  adalah sebuah homomorfisma.

Bukti:

Mengikuti fakta bahwa dan merupakan homomorfisma.

**Teorema 3.2**  bukan merupakan fungsi surjektif.

Bukti:

Ingat bahwa dibangun oleh . Untuk setiap generator , dimana dan keduanya adalah 4-sikel, yakni dan adalah permutasi ganjil. Hal ini sesuai dengan fakta bahwa merupakan sebuah homomorfisma yaitu jika adalah bayangan dari sebuah elemen , maka dan pasti keduanya ganjil atau keduanya genap.

 beranggotakan dimana permutasi ganjil dan permutasi genap. Karena tidak semua elemen ini menjadi bayangan dari , terbukti bukan merupakan fungsi surjektif.

1. **Orientasi *Edge* dan *Corner Subcube***

**Definisi 3.8** Pada *cube* posisi terselesaikan, satu sisi dari setiap *edge* dan *corner subcube* ditandai dengan silang “”. Tanda silang tersebut menentukan “**peta orientasi**” dari posisi suatu *subcube* (lihat Gambar 3.16). Sebuah *edge subcube* pada *cube* teracak dikatakan terorientasi dengan benar jika tanda silangnya sesuai dengan tanda silang dari posisinya pada peta orientasi, dan sebaliknya dikatakan tidak terorientasi dengan benar. Begitu juga sebuah *corner* *subcube* pada *cube* teracak dikatakan terorientasi dengan benar jika tanda silangnya sesuai dengan tanda silang dari posisinya pada peta orientasi, dan sebaliknya dikatakan tidak terorientasi dengan benar, jika rotasinya 120° searah jarum jam dikatakan *edge* tersebut *tidak terorientasi tipe-1* dan rotasinya 120° berlawanan arah jarum jam dikatakan *edge* tersebut *tidak terorientasi tipe-2*.

 

**Gambar 3.16** Orientasi *Edge* dan *Corner*

Catatan:

*Pelabelan bukan dilakukan pada Rubik’s Cube yang dimainkan sehingga cube yang bertanda tetap berada pada posisi terselesaikan, sebagai rujukan untuk membandingkan posisi cube yang telah dimainkan dengan posisi awal.*

Orientasi *edge* pada sebuah cube dapat digambarkan dengan 12-tupel terdiri dari 0 dan 1, dimana setiap koordinat menggambarkan posisi sebuah *edge*. Jika *edge* pada posisinya terorientasi dengan benar dilambangkan dengan 0, dan jika sebaliknya dilambangkan dengan 1. Begitu juga untuk *corner* dapat digambarkan dengan 8-tupel terdiri dari 0, 1 dan 2, dimana setiap koordinat menggambarkan posisi sebuah *corner*. Jika *corner* pada posisinya terorientasi dengan benar dilambangkan dengan 0, jika tidak terorientasi tipe-1 dilambangkan dengan 1, dan jika tidak terorientasi tipe-2 dilambangkan dengan 2.

1. **Permutasi pada Rubik’s Cube**

Pada permainan Rubik’s Cube, permutasi dapat ditinjau dari susunan 54 *facet* ataupun dari posisi dan orientasi 26 *subcube*.

**Permutasi Identitas**

Permutasi identitas Rubik’s Cube adalah ketika *subcube* dari kubus tersebut berada pada posisi dan orientasi yang benar, yaitu *solved position*.

**Order Permutasi**

Jika suatu permutasi diterapkan secara berulang-ulang, pada akhirnya akan manghasilkan identitas. Contohnya, dengan menerapkan sebanyak enam kali akan diperoleh identitas.



**Gambar 3.17**



**Gambar 3.18**



**Gambar 3.19**



**Gambar 3.20**



**Gambar 3.21**



**Gambar 3.22**

Angka perulangan terkecil yang harus diterapkan suatu permutasi untuk menghasilkan identitas disebut *order permutasi*. Demikian, berorder 6 karena , dan permutasi masing-masing berorder 4.

**Struktur Sikel**

Jika kita menerapkan permutasi yang terdiri dari satu sikel dengan panjang secara berulang-ulang, pada setiap pengulangan ke- akan diperoleh permutasi tersebut kembali ke identitas. Jika permutasi tersebut terdiri atas beberapa sikel dengan panjang yang berbeda, maka identitas akan muncul pada setiap pengulangan ke- dari panjang sikel-sikel tersebut.

Misalkan permutasi . terdiri atas sebuah -sikel dan sebuah -sikel, maka order adalah . Jika dioperasikan sebanyak lima kali, , maka -sikel akan terhapus. Sedangkan -sikel, karena dioperasikan sebanyak bilangan ganjil, akan tetap -sikel, jadi .

Meskipun permutasi memindahkan 7 objek, hanya memindahkan 2 objek. Jika objek pada contoh di atas adalah *subcubes* dari Rubik’s Cube, kemudian diterapkan operasi sebanyak lima kali, maka hasilnya hanya akan berdampak pada 2 *subcube*.

Contoh:

Operasi memindahkan 13 *subcubes*, tetapi hanya memindahkan 4 *subcubes* – menukar dua pasang *edge subcubes*. Dengan menggunakan notasi Singmaster untuk memberi nama setiap *facet*, dapat diidentifikasi bentuk siklik dari permutasi .

Karena ada 13 *subcubes* pada siklus permutasi tersebut, artinya ada 13 *subcubes* yang dipindahkan oleh . Terdiri atas dua -sikel dan tiga -sikel. Jika diterapkan sebanyak tiga kali, maka sembilan *corner subcubes* yang berbentuk -sikel akan tetap pada keadaan semula, dan yang bergerak hanya dua pasang *edge subcubes*.

**Jumlah Seluruh Permutasi Rubik’s Cube**

Saat pertama kali Ideal Toy Co. menjual Rubik’s Cube di Amerika pada awal 1980-an, pada kemasannya tertera pernyataan bahwa ada lebih dari tiga milyar kemungkinan posisi yang dapat dicapai sebuah Rubik’s Cube. Pernyataan ini benar, namun sangat jauh dari nilai sesungguhnya. Jumlah posisi yang mungkin dari Rubik’s Cube 3×3×3 adalah

43 quintillion, 252, quadrillion, 3 trillion, 274 billion, 489 million, 856 thousand. Penamaan bilangan besar ini mengikuti aturan US & modern British.

**Gambar 3.23** Penamaan Bilangan Besar

Beberapa kombinasi gerakan dalam permainan Rubik’s Cube mungkin terlihat berbeda ketika ditulis, namun ternyata menghasilkan permutasi yang sama. Sebagai contoh, *UUU* dan *U’* menghasilkan permutasi yang sama pada sebuah *cube*, dan dihitung sebagai satu permutasi.

Rubik’s Cube terdiri atas 8 *corner subcubes,* 12 *edge subcube,* dan 6 *center subcubes.* Seluruhnya ada 26 *subcubes* yang terlihat. Meski sebarang gerakan diterapkan pada *cube*, *corner* akan tetap berada pada *corner, edge* tetap pada *edge,* dan *center* tetap pada *center.* Perlu diperhatikan pula bahwa posisi antar *center subcubes* tidak pernah berubah satu sama lain, jadi hanya ada 1 permutasi *center subcubes*. *Legal move* pada Rubik’s Cube adalah permutasi genap pada kubus tersebut. adalah jumlah keseluruhan permutasi *corner* dan *edge,* sehingga permutasi yang mungkin terjadi hanya separuh dari jumlah tersebut

Karena setiap *corner subcubes* memiliki 3 *facet*, maka setiap *corner subcubes* memiliki 3 kemungkinan orientasi. Begitu juga dengan *edge subcubes,* setiap *edge subcubes* memiliki 2 kemungkinan orientasi. Kita dapat mengorientasikan seluruh *corner* dan *edge,* namun orientasi yang terakhir merupakan konsekuensi dari orientasi sebelumnya karena tidak mungkin ada hanya satu *corner* atau *edge* saja yang belum terorientasi. Dengan menerapkan prinsip perkalian, diperoleh total permutasi pada Rubik’s Cube

**Definisi 3.9** Posisi *cube* merupakan sebuah 4-tupel dengan , , dengan , dan dengan . adalah himpunan semua posisi.

Operasi pada Rubik’s Cube didefinisikan dengan jelas sebagai sebuah fungsi dari ke . Himpunan dari semua operasi yang mungkin adalah subgrup dari grup simetrik . disebut Grup Permutasi Rubik’s Cube.

**Definisi 3.10** Posisi dikatakan *mungkin dicapai* jika memiliki orbit yang sama dengan “posisi awal” yaitu posisi identitasd . ( menunjukkan dan , menunjukkan 8-tupel dan 12-tupel dengan semua unsur 0). adalah himpunan semua posisi yang mungkin (*possible position*).

**Teorema 3.3** Posisi menunjukkan posisi yang mungkin dari sebuah Rubik’s Cube jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut

1. , modulo 3
2. , modulo 2

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan jika menunjukkan posisi yang mungkin dari sebuah Rubik’s Cube, maka ketiga kondisi di atas terpenuhi. Pada posisi awal cube, , ketiga kodisi tersebut terpenuhi yakni , , jadi . Dan sehingga (ii) dan (iii) terpenuhi. Ketiga sifat tetap berlaku untuk setiap gerakan , yakni (i) setiap gerakan ini secara serempak membentuk 4-sikel corner dan 4-sikel edge, masing-masing dapat ditulis sebagai hasil kali tiga 2-sikel sehingga totanya enam 2-sikel membentuk permutasi genap. (ii) Gerakan dan tidak mengubah komponen , sementara secara serempak menambah dua komponen dengan 1 modulo 3 dan mengurangi dua komponen dengan 1 modulo 3. (iii) Masing-masing gerakan mengubah empat komponen dengan 1.

****

**Gambar 3.24** Permutasi *Edge* dan *Corner*

Dari pembuktian pertama, benar bahwasanya jika menunjukkan posisi yang mungkin dari sebuah Rubik’s Cube maka ketiga kondisi di atas terpenuhi. Untuk membuktikan arah sebaliknya, harus ditunjukkan bahwa posisi yang mungkin dari sebuah cube dan memenuhi tiga kondisi di tersebut dapat dikembalikan ke posisi awal cube.