**BAB IV**

**TEORI GRUP DALAM PENYELESAIAN**

**PERMAINAN RUBIK’S CUBE 3×3×3**

Think of a scrambled Rubik’s Cube as a car you want to fix on your own. You not only need some tools but you need to know how to use them.

*David Joyner,* **Adventures in Group Theory: Rubik’s Cube, Merlin’s Machine, and Other Mathematical Toys,** 2008

1. **Penggunaan Komuter untuk Mengubah Posisi Subcube**

Jika jumlah *subcube* yang sama yang dipengaruhi oleh $X$ dan $Y$ sedikit, maka dapat diasumsikan bahwa $X$ dan $Y$ “hamper komutatif. Sehingga efek dari $XYX^{-1}Y^{-1}$ akan mendekati identitas. Hal ini akan sangat berguna ketika Rubik’s Cube yang dimainkan hampir mencaai posisi *solved*, penerapan komuter dari gerakan tertentu tidak akan berpengaruh banyak terhadap *subcube* yang telah tersusun dengan benar, dan efek dari gerakan dapat ditujukan pada *subcube* yang masih teracak tanpa mengacak kembali posisi-posisi yang sudah benar.

Faktanya, jika pada Rubik’s Cube terdapat satu *subcube* yang dipengaruhi oleh $X$ dan $Y$, dan tidak ada *subcube* lain yang dipengaruhi oleh $X$ dan $Y$, maka $XYX^{-1}Y^{-1}$ akan membentuk sebuah 3-sikel pada Rubik’s Cube, yakni terdapat *subcube* $a,b,c$ sedemikian hingga $XYX^{-1}Y^{-1}$ akan memindahkan $a$ ke $b$, $b$ ke $c$, $c$ ke $a$, dan tidak mempengaruhi *subcube* yang lain.

Contoh:

* Sikel 3 *corner*

$X=LDL^{-1}$ menggerakkan *subcube* $ufl$ dari layer atas dan tidak mengubah *subcube* lain pada layer tersebut.

$Y=U$ hanya menggerakkan layer atas.

Jadi hanya *subcube* $ufl$ yang dipengaruhi oleh $X$ dan $Y$.

Berdasarkan fakta yang telah dijelaskan di atas,

$XYX^{-1}Y^{-1}$ $=LDL^{-1}U\left(LDL^{-1}\right)^{-1}U^{-1}$

 $=LDL^{-1}U\left(LD^{-1}L^{-1}\right)U^{-1}$.

Adalah 3-sikel *corner subcube*.

 $→$ $→$ $→$

**Gambar 4.1** $XYX^{-1}Y^{-1}$

 

**Gambar 4.2** Berurutan dari kiri$\left(XYX^{-1}Y^{-1}\right)^{2}$ dan $\left(XYX^{-1}Y^{-1}\right)^{3}$

* Sikel 3 *edge*

Misalkan $X=R\_{S}$ dan $Y=U^{2}$, maka $XYX^{-1}Y^{-1}=R\_{S}U^{2}R^{-1}\_{S}U^{2}$ akan menggerakkan tiga *edge subcube* pada layer bawah, depan, dan belakang secara siklik.

 $→$  $→$  $→$ 

**Gambar 4. 3** Berurutan dari kiri atas $XYX^{-1}Y^{-1}$, $\left(XYX^{-1}Y^{-1}\right)^{2}$ dan $\left(XYX^{-1}Y^{-1}\right)^{3}$

1. **Penggunaan Konjugator untuk Mengubah Posisi Subcube**

Jika $X$ dan $Z$ adalah dua gerakan pada Rubik’s Cube, kita dapat membuat gerakan baru $ZXZ^{-1}$. Gerakan ini disebut *konjugasi* dari $X$. Konjugasi mengubah *subcube* yang sejenis namun terletak pada posisi yang berbeda. Misalnya jika $X$ menukar posisi dua *edge*, maka $ZXZ^{-1}$ juga menukar dua *edge* namun pada *edge* yang berbeda. Jika $X$ menggerakkan tiga *edge* secara siklik, maka $ZXZ^{-1}$ jua menggerakkan tiga *edge* secara siklik namun pada *edge* yang berbeda.

Contoh:

Misalkan $X=R\_{S}U^{2}R^{-1}\_{S}U^{2}$, dan $Z=F^{2}U$, maka

$ZXZ^{-1}=\left(F^{2}U\right)R\_{S}U^{2}R^{-1}\_{S}U^{2}\left(U^{-1}F^{2}\right)=F^{2}UR\_{S}U^{2}R^{-1}\_{S}U^{1}F^{2}$.

* $Z$ menggerakkan tiga *edge subcube* yang ingin kita gerakkan secara siklik, ke layer kanan, depan, dan kiri.
* $X$ menggerakkan *edge* $fd,uf,ub$ secara siklik.
* Mengambalikan tiga *edge subcube* kembali ke tempat yang seharusnya dengan memperbaiki efek yang ditimbulkan oleh $Z$.

 $→$ $→$ $→$

**Gambar 4.4** $ZXZ^{-1}$

Perlu diperhatikan bahwasanya dalam mengoperasikan Rubik’s Cube, terdapat hal-hal yang tidak mungkin dilakukan. Berikut ini adalah gerakan-gerakan yang tidak mungkin dilakukan tanpa mempengaruhi *subcube* yang lain.

* Membalik satu *edge*.
* Menukar posisi dua dua *subcube*.
* Mengubah orientasi satu *corner*.
1. **Strategi untuk Menyelesaikan Rubik’s Cube**

Ada beberapa ide dasar dalam menyelesaikan Rubik’s Cube:

1. Dengan mengabaikan orientasi, pertama pastikan posisi *corner subgroups* dapat disesuaikan dengan *center subgroup* menggunakan *twist* (memutar) dan *flips* (membalik).
2. Dengan mengabaikan orientasi, yang kedua pastikan *edge subgroups* dapat disesuaikan dengan *center subgroup* menggunakan *flips*.
3. Perbaiki orientasi *corner subcubes* menggunakan *twist*.
4. Perbaiki orientasi *edge subcubes* menggunakan *flips*.

Berikut adalah algoritma yang diperlukan dalam melengkapi langkah-langkah di atas. Algoritma ini telah disederhanakan dengan menerapkan konjugasi dan komutator.

**Tabel 4.1** Algoritma Penyelesaian Rubik’s Cube



1. **Metode Subgrup**

Salah satu pendekatan untuk menyelesaikan Rubik’s Cube adalah dengan menggunakan computer untuk membentuk serangkaian subgrup tertentu

$$G\_{n}=\left\{e\right\}<G\_{n-1}<…<G\_{1}<G\_{0}=G,$$

dimana $G=\left\{F,R,B,L,U,D\right\}$ adalah Rubik’s Cube grup, yang memperbolehkan penerapan strategi berikut:

* Melambangkan posisi pada Rubik’s Cube dengan elemen $g\_{0}\in G$.
* Menentukan himpunan *complete representative coset* dari $G\_{k+1}/G\_{k}$:



* (langkah 1) Jika $g\_{0}\in g\_{1,i}G\_{1}$ (dimana $i=\left\{1,…,n\_{1}\right\}$ maka misalkan $g\_{1}=g\_{1,i}$ dan $g'\_{1}=g'\_{1}g\_{0}$ (catatan $g'\_{1}\in G\_{1}$).
* (langkah induksi) Jika $g'\_{k}\in G\_{k}$ telah didefinisikan dan jika $g'\_{1}\in g'\_{k+1,j}G\_{k}$ (dimana $j\in \left\{1,…,n\_{1}\right\}$, maka misalkan $g\_{k+1}=g\_{k+1},j$ dan $g'\_{k+1}=g^{-1}\_{k+1}g'\_{k}$ (catatan $g'\_{k+1}\in G\_{k+1}$).
* Didapatkan $1=g^{-1}\_{n}g^{-1}\_{n-1}g^{-1}\_{n-2}…g^{-1}\_{1}g^{-1}\_{0}$, jadi

$g\_{0}=g\_{1}g\_{2}…g\_{n-1}g\_{n}$.

1. Corner-Edge Method

Misalkan $G\_{1}$ menotasikan subgrup yang tidak memindahkan *corner*, $G\_{2}$ menotasikan subgrup yang tidak memindahkan *corner* atau *edge*, dan $G\_{3}$ menotasikan subgrup memindahkan *corner* atau *edge* dan tidak mengorientasikan *corner.* Dan misalkan $G\_{4}=\left\{e\right\}$:

$$G\_{4}=\left\{e\right\}⊂G\_{3}⊂G\_{2}⊂G\_{1}⊂G\_{0}=G.$$

1. Lambangkan posisi pada Rubik’s Cube dengan elemen $g\_{0}\in G$.
2. Misalkan $g\_{1}$ menotasikan gerakan yang memindahkan semua *corner* ke posisi yang tepat (pada posisi *solved* dan memungkinkan untuk di-*twist*), maka $g^{-1}\_{1}g\_{0}\in G\_{1}$. Misalkan $g'\_{1}=g^{-1}\_{1}g\_{0}$.
3. Misalkan $g\_{2}$ menotasikan gerakan yang memindahkan semua *edge* ke posisi yang tepat (pada posisi *solved* dan memungkinkan untuk mengorientasikan *corner* dan *edge*), dan membiarkan semua bagian yang belum dipermutasikan, maka $g^{-1}\_{2}g'\_{1}\in G\_{2}$. Misalkan $g'\_{2}=g^{-1}\_{2}g'\_{1}$.
4. Misalkan $g\_{3}$ menotasikan gerakan yang “menyelesaikan” semua *corner* (memutar semua *corner* pada orientasi yang benar dan membalik beberapa *edge*) tapi tidak mempermutasikan *subcube* manapun, maka $g^{-1}\_{3}g'\_{2}\in G\_{3}$. Misalkan $g'\_{3}=g^{-1}\_{3}g'\_{2}$.
5. Misalkan $g\_{4}$ menotasikan gerakan yang “menyelesaikan” semua *edge* (membalik seluruh *edge* tersebu ke arah yang benar) dan membiarkan semua *facet* lain.
6. Solusinya adalah $g\_{0}=g\_{1}g\_{2}g\_{3}g\_{4}$.
7. Thistlethwaite’s Method

Morwen Thistlethwaite adalah matematikawan seangkatan dengan David Singmaster yang menemukan metode subgrup terbaik untuk menyelesaikan Rubik’s Cube. Dia menggunakan



1. **Kociemba’s Method**

Pada awaal tahun 1990-an, Herbert Kociemba mengembangkan algoritma temuan Thistlethwaite, dan menyebut algoritmanya dengan “algoritma dua-fase”. Kociemba mereduksi grup penghubungnya hingga dua grup saja:

* $G\_{0}=\left〈F,R,B,L,U,D\right〉$,
* $G\_{1}=\left〈F^{2},R,B^{2},L,U^{2},D^{2}\right〉$,
* $G\_{2}=e$.