**BAB II**

**KAJIAN PUSTAKA**

1. **Hakikat Teknologi Pendidikan**

Kata teknologi sering dipahami oleh orang awam sebagai sesuatu yang berupa mesin atau hal-hal yang berkaitan dengan permesinan, namun sesungguhnya teknologi pendidikan memiliki makna yang lebih luas, karena teknologi pendidikan merupakan perpaduan dari unsur manusia, mesin, ide, prosedur, dan pengelolaannya.[[1]](#footnote-2) kemudian pengertian tersebut akan lebih jelas dengan pengertian bahwa pada hakikatnya teknologi adalah penerapan dari ilmu atau pengetahuan lain yang terorganisir ke dalam tugas-tugas praktis.[[2]](#footnote-3) Keberadaan teknologi harus dimaknai sebagai upaya untuk meningkatkan efektivitas dan efisiensi serta teknologi tidak dapat dipisahkan dari masalah, sebab teknologi lahir dan dikembangkan untuk memecahkan permasalahan yang dihadapi oleh manusia, berkaitan dengan hal tersebut, maka teknologi pendidikan juga dapat dipandang sebagai suatu produk dan proses.[[3]](#footnote-4)

Teknologi pendidikan bersifat abstrak dan mudah dipahami karena sifatnya lebih konkrit seperti radio, televisi, proyektor, OHP dan sebagainya . Dalam hal ini teknologi pendidikan bisa dipahami sebagai sesuatu proses yang kompleks, dan terpadu yang melibatkan orang, prosedur, ide, peralatan, dan organisasi untuk menganalisis masalah, mencari jalan untuk mengatasi permasalahan, melaksanakan, menilai, dan mengelola pemecahan masalah tersebut yang mencakup semua aspek belajar manusia.[[4]](#footnote-5) Sejalan dengan hal tersebut, maka lahirnya teknologi pendidikan dari adanya permasalahan dalam pendidikan. Permasalahan pendidikan yang mencuat saat ini, meliputi pemerataan kesempatan memperoleh pendidikan, peningkatan mutu/kualitas, relevansi, dan efisiensi pendidikan. Permasalahan serius yang masih dirasakan oleh pendidikan mulai dari pendidikan dasar hingga pendidikan perguruan tinggi adalah masalah kualitas, tentu saja ini dapat di pecahkan melalui pendekatan teknologi pendidikan.[[5]](#footnote-6)

Dengan demikian teknologi pendidikan merupakan suatu ilmu untuk memecahkan masalah belajar atau memfasilitasi kegitan pembelajaran dinama teknologi pendidikan berperan sebagai perangkat lunak yang berbentuk cara-cara yang sisitematis dalam memecahkan masalah pembelajaran sehingga teknologi pendidikan sangat dibutuhkan untuk proses pembelajaran dan mendapat tempat secara luas dalam dunia pendidikan

1. **Pengertian Teknologi**

Berdasarkan pandangan tentang sejarah Teknologi, Seattler berpendapat bahwa teknologi sebagai upaya yang lebih berpusat pada peningkatan keterampilan dan organisasi kerja dibandingkan dengan mesin dan peralatan.[[6]](#footnote-7) Teknologi digambarkan sebagai sistematisasi pengetahuan praktis dalam meningkatkan produktivitas. Teknologi dapat diartikan juga sebagai penerapan pengetahuan ilmiah tentang proses belajar pada manusia dalam tugas praktis belajar dan mengajar.[[7]](#footnote-8)

Ferdinand Braudel berpendapat bahwa sebenarnya segala sesuatu adalah teknologi, bukan hanya usaha manusia yang paling memeras keringat saja, melainkan juga usahanya yang membosankan dan dilakukan dengan penuh kesabaran agar dikenal oleh dunia luar, bukan hanya perubahan cepat yang kita maksudkan dengan revolusi, melainkan juga peningkatan proses dan sarana maupun kegiatan-kegiatan lain yang tak terbilang jumlahnya dan tidak mempunyai dampak pembaruan yang berarti.[[8]](#footnote-9)

Marcell Mauss mengatakan apa yang saya namakan teknologi adalah tindakan tradisional yang efektif, artinya teknologi menyiratkan tindakan seseorang atau suatu generasi terhadap yang lain, akan tiba saatnya teknologi dapat menjawab apa yang saat ini dianggap tidak mungkin dicapai atau dimanfaatkan secara penuh karena alasan sosial maupun psikologi dan akan tiba pula saatnya teknologi sampai pada batasnya dimana secara material maupun teknologi akan menghentikan upaya.[[9]](#footnote-10)

Dengan demikian teknologi dapat disimpulkan bukannya sekedar aplikasi ilmu pengetahuan, melainkan juga perbaikan proses serta sarana yang memungkinkan suatu generasi menggunakan pengetahuan generasi sebelumnya sebagai dasar bertindak. Kebanyakan orang itu beranggapan bahwa teknologi tidak hanya berasal dari bidang ilmu pengetahuan melainkan juga bidang-bidang lain seperti seni dan penemuan sosial. Jadi teknologi itu bukan sekedar penerapan dari sebuah ilmu saja.

1. **Pengertian Pendidikan**

Pendidikan diartikan sebagai suatu kegiatan yang sistematis dan sistemik terarah kepada terbentuknya kepribadian peserta didik. Sistematis oleh karena proses pendidikan berlangsung melalui tahap-tahap bersinambungan dan sistemik oleh karena berlangsung dalam semua situasi kondisi di semua lingkungan yang saling mengisi (lingkungan rumah, sekolah dan masyarakat).[[10]](#footnote-11)

Tujuan pendidikan memuat gambaran tentang nilai-nilai yang baik, luhur, pantas, benar dan indah untuk kehidupan. Karena itu tujuan pendidikan memiliki dua fungsi yaitu memberikan arah kepada segenap kegiatan pendidikan dan merupakan suatu yang ingin dicapai oleh segenap kegiatan pendidikan.[[11]](#footnote-12)

Sebagai suatu komponen pendidikan, tujuan pendidikan menduduki posisi terpenting diantara komponen-komponen pendidikan lainnya. Dapat dikatakan bahwa segenap komponen dari seluruh kegiatan pendidikan dilakukan semata-mata terarah kepada pencapaian tujuan tersebut. Dengan demikian maka kegiatan-kegiatan yang tidak relevan dengan tujuan tersebut dianggap menyimpang. Disini terlihat bahwa tujuan pendidikan itu bersifat normatif, yaitu mengandung unsur norma yang bersifat memaksa, tetapi tidak bertentangan dengan hakikat perkembangan peserta didik serta dapat diterima oleh masyarakat sebagai nilai hidup yang baik.[[12]](#footnote-13)

Berdasarkan pengertian dan tujuan dari pendidikan diatas, maka menjadi keharusan bagi pendidik untuk memahaminya. Karena apabila pendidik tidak memahaminya akan mengakibatkan kesalahan dalam pelaksanakan suatu pendidikan.

1. **Hubungan Teknologi dalam Pendidikan**

Perubahan lingkungan luar dunia pendidikan, mulai lingkungan sosial, ekonomi, teknologi, sampai politik mengharuskan dunia pendidikan memikirkan kembali bagaimana perubahan tersebut mempengaruhinya sebagai sebuah institusi sosial dan bagaimana harus berinteraksi dengan perubahan tersebut. Salah satu perubahan lingkungan yang sangat mempengaruhi dunia pendidikan adalah hadirnya sebuah teknologi.

Teknologi Informasi dan Komunikasi merupakan elemen penting dalam kehidupan berbangsa dan bernegara. Peranan teknologi informasi pada aktivitas manusia pada saat ini memang begitu besar. Teknologi informasi telah menjadi fasilitas utama bagi kegiatan berbagai sektor kehidupan dimana memberikan andil besar terhadap perubahan – perubahan yang mendasar pada struktur operasi dan manajemen organisasi, pendidikan, trasportasi, kesehatan dan penelitian. Oleh karena itu sangatlah penting peningkatan kemampuan sumber daya manusia.[[13]](#footnote-14)

Perkembangan teknologi informasi dan komunikasi (TIK) telah memberikan pengaruh terhadap dunia pendidikan khususnya dalam proses pembelajaran. Menurut Rosenberg), dengan berkembangnya penggunaan TIK ada lima pergeseran dalam proses pembelajaran yaitu: (1) dari pelatihan ke penampilan, (2) dari ruang kelas ke di mana dan kapan saja, (3) dari kertas ke “on line” atau saluran, (4) fasilitas fisik ke fasilitas jaringan kerja, (5) dari waktu siklus ke waktu nyata*.*[[14]](#footnote-15)Komunikasi sebagai media pendidikan dilakukan dengan menggunakan media-media komunikasi seperti telepon, komputer, *internet, e-mail*, dan sebagainya. Interaksi antara guru dan siswa tidak hanya dilakukan melalui hubungan tatap muka tetapi juga dilakukan dengan menggunakan media-media tersebut (Rosenberg, 2001).[[15]](#footnote-16)

Jadi untuk meningkatkan kualitas pembelajaran dapat dilakukan dengan menggunakan media teknologi pendidikan, yaitu dengan cara mencari dan mengidentifikasi permasalahan yang dihadapi dalam belajar kemudian dicarikan pemecahannya melalui aplikasi Teknologi Informasi yang sesuai. Upaya pemecahan permasalahan pendidikan terutama masalah yang berhubungan dengan kualitas pembelajaran, dapat ditempuh dengan cara penggunaan berbagai sumber belajar dan penggunaan media pembelajaran yang berfungsi sebagai alat bantu dalam meningkatkan kadar hasil belajar peserta didik. Teknologi informasi digunakan sebagai media untuk mempermudah pencarian informasi tersebut.

1. **Pengertian Teknologi Pembelajaran**

Teknologi pembelajaran tumbuh dan berkembang dari praktik pendidikan dan gerakan komunikasi audiovisual. Teknologi pembelajaran semula dilihat sebagai teknologi peralatan yang berkaitan dengan penggunaan peralatan, media, dan sarana untuk mencapai tujuan pendidikan atau kegiatan pembelajaran dengan memanfaatkan alat bantu audiovisual. Teknologi pembelajaran merupakan gabungan dari tiga aliran yang saling berkepentingan, yaitu media pendidikan, psikologi pembelajaran, dan pendekatan sistem untuk pendidikan.[[16]](#footnote-17)

Silber berpendapat bahwa teknologi pembelajaran adalah pengembangan ( riset, desain, produksi, evluasi, dukungan-pasokan dan pemanfaatan) komponen sistem pembelajaran (pesan, orang, bahan, peralatan, teknik, dan latar) serta pengolahan usaha pengembangan (organisasi dan personal) secara sitematis dengan tujuan memecahkan masalah belajar.[[17]](#footnote-18)

Teknologi pembelajaran merupakan suatu ilmu pendidikan dengan obyek belajar pada manusia secara pribadi atau kelompok karena tujuan utama teknologi pembelajaran adalah untuk memecahkan masalah belajar atau memfasilitasi kegitan pembelajaran. Teknologi pembelajaran sebagai perangkat lunak yang berbentuk cara-cara yang sisitematis dalam memecahkan masalah pembelajaran semakin canggih dan mendapat tempat secara luas dalam dunia pendidikan. Dengan demikian aplikasi praktis dari teknologi pembelajaran dalam pemecahan masalah belajar mempunyai bentuk kongkret dengan adanya sumber belajar yang menfasilitasi peserta didik untuk belajar sehingga dalam proses pembelajaran akan berjalan sesuai dengan tujuan yang diinginkan.

1. **Hakikat Belajar**

Sampai saat ini kita sudah sering menggunakan istilah belajar, namun kita belum memberikan pembatasan apa belajar itu. Sebenarnya sangat sulit memberikan arti belajar karena belajar itu menyangkut ilmu jiwa kognitif yang dalam dan luas. Belajar merupakan suatu proses aktif dalam memperoleh pengalaman/pengetahuan baru sehingga menyebabkan perubahan tingkah laku, misalnya setelak belajar matematika siswa mampu mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan matematikanya dimana sebelumnya ia tidak dapat melakukannya.[[18]](#footnote-19)

Belajar dimulai sejak manusia lahir sampai akhir hayat. Pada waktu bayi, seorang bayi menguasai keterampilan-keterampilan yang sederhana, seperti memegang botol dan mengenal orang-orang di sekelilingnya. Ketika menginjak masa anak-anak dan remaja, sejumlah sikap, nilai, dan keterampilan berinteraksi sosial dicapai sebagai kompetensi. Pada saat dewasa, individu diharapkan telah mahir dengan tugas-tugas kerja tertentu dan keterampilan-keterampilan fungsional lainnya, seperti mengendarai mobil, berwiraswasta, dan menjalin kerja sama dengan orang lain.

Kemampuan manusia untuk belajar merupakan karakteristik penting yang membedakan manusia dengan makhluk hidup lainnya. Belajar merupakan aktivitas yang selalu dilakukan sepanjang hayat manusia, bahkan tiada hari tanpa belajar. Dengan demikian, belajar tidak hanya dipahami sebagai aktivitas yang dilakukan oleh pelajar saja. Baik mereka yang sedang belajar di tingkat sekolah dasar, sekolah tingkat pertama, sekolah tingkat atas, perguruan tinggi, maupun mereka yang sedang mengikuti kursus, pelatihan, dan kegiatan pendidikan lainnya. Tapi lebih dari itu, pengertian belajar itu sangat luas dan tidak hanya sebagai kegiatan di bangku sekolah saja.[[19]](#footnote-20)

Belajar merupakan aktivitas yang dilakukan seseorang untuk mendapatkan perubahan dalam dirinya melalui pelatihan-pelatihan atau pengalaman-pengalaman. Dengan demikian, belajar dapat membawa perubahan bagi si pelaku, baik perubahan pengetahuan, sikap, maupun keterampilan. Dengan perubahan-perubahan tersebut, tentunya si pelaku juga akan membantu dalam memecahkan permasalahan hidup dan bisa menyesuaikan diri dengan lingkungan.

1. **Pengertian Belajar**

Belajar merupakan kegiatan bagi setiap orang. Pengetahuan, ketrampilan, kebiasaan, kegemaran dan sikap seseorang terbentuk, dimodifikasi dan berkembang disebabkan belajar. Karena itu seseorang dikatakan belajar, bila dapat diasumsikan dalam diri orang itu menjadi suatu proses kegiatan yang mengakibatkan suatu perubahan tingkah laku. Perubahan tingkah laku itu memang dapat diamati dan berlaku dalam waktu relatif lama. Perubahan tingkah laku yang berlaku dalam waktu relatif lama itu disertai usaha orang tersebut, sehingga orang itu dari tidak mampu mengerjakan sesuatu menjadi mampu mengerjakannya. Tanpa usaha, walaupun terjadi perubahan tingkah laku, bukanlah belajar. Kegiatan dan usaha untuk mencapai perubahan tingkah laku itu merupakan proses belajar sedang perubahan tingkah laku itu sendiri merupakan hasil belajar. Misalnya, setelah belajar matematika seorang siswa mampu mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan matematikanya di mana sebelumnya ia tidak dapat melakukannya.

Proses terjadinya belajar sangat sulit diamati. Karena itu orang cenderung memverivikasi tingkah laku manusia untuk disusun menjadi pola tingkah laku yang akhirnya tersusunlah suatu model yang menjadi prinsip-prinsip belajar yang bermanfaat sebagai bekl untuk memahami, mendorong dn memberi arah kegiatn belajar. Prinsip-prinsip belajar tersebut diaplikasikan ke dalam pengajaran disiplin ilmu tertentu.

Di dalam belajar terdapat tiga masalah pokok, yaitu:

1. Masalah mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya belajar.
2. Masalah mengenai bagaimana belajar itu berlangsung dan prinsip mana yang dilaksanakan.
3. Masalah mengenai hasil belajar.[[20]](#footnote-21)

Dua masalah pokok yang pertama tersebut berkenaan dengan proses belajar yang sangat berpengaruh kepada masalah pokok ketiga. Dengan demikian bagaimana peristiwa terjadinya proses belajar akan menentukan hasil belajar seseorang.

Dalyono dalam bukunya Psikologi Pendidikan mengemukakan ada beberapa elemen penting yang mencirikan pengertian tentang belajar, yaitu bahwa: [[21]](#footnote-22)

1. Belajar merupakan suatu perubahan dalam tingkah laku, di mana perubahan itu dapat mengarah kepada tingkah laku yang lebih baik, tetapi juga ada kemungkinan mengarah kepada tingkah laku yang lebih buruk. Perubahan tingkah laku tersebut biasanya tergantung bagaimana interaksi yang terjadi dari individu dengan lingkungannya.
2. Belajar merupakan suatu perubahan yang terjadi melalui latihan atau pengalaman. Sesuai dengan pengungkapan Nana Sudjana bahwa, “belajar adalah proses perubahan tingkah laku berkat adanya pengalaman”. Dalam hal ini perubahan-perubahan yang disebabkan oleh pertumbuhan atau kematangan tidak dianggap sebagai hasil belajar; seperti perubahan-perubahan yang terjadi pada diri seorang bayi.
3. Untuk dapat disebut belajar, maka perubahan itu harus relatif mantap; harus merupakan akhir dari suatu periode waktu yang cukup panjang. Berapa lama periode waktu itu berlangsung sulit ditentukan dengan pasti, tetapi perubahan itu hendaknya merupakan akhir dari suatu periode yang mungkin berlangsung berhari-hari, berbulan-bulan ataupun bertahun-tahun. Ini berarti kita harus mengenyampingkan perubahan-perubahan tingkah laku yang disebabkan oleh motivasi, kelelahan, adaptasi, ketajaman perhatian atau kepekaan seseorang, yang biasanya hanya berlangsung sementara.
4. Tingkah laku yang mengalami perubahan karena belajar menyangkut berbagai aspek kepribadian, baik fisik maupun psikis, seperti: perubahan dalam pengertian, pemecahan suatu masalah/berpikir, keterampilan, kecakapan, kebiasaan, ataupun sikap. Lester D. Crow dan Alice Crow pernah mengungkapkan bahwa belajar adalah perbuatan untuk memperoleh kebiasaan, ilmu pengetahuan dan berbagai sikap.
5. **Ciri-Ciri Belajar**

Dari pendapat beberapa ahli tentang definisi belajar, Bahruddin dan Esa Nur Wahyuni menyimpulkan ada beberapa ciri belajar, yaitu:

1. Belajar ditandai dengan adanya perubahan tingkah laku (*change behavior*). Ini berarti, bahwa hasil dari belajar hanya dapat diamati dari tingkah laku, yaitu adanya perubahan tingkah laku, dari tidak tahu menjadi tahu, dari tidak terampil menjadi terampil. Tanpa mengamati tingkah laku hasil belajar, maka tidak akan dapat mengetahui ada tidaknya hasil belajar;
2. Perubahan perilaku relative permanent. Ini berarti, bahwa perubahan tingkah laku yang terjadi karena belajar untuk waktu tertentu akan tetap atau tidak berubah-ubah. Tetapi perubahan tingkah laku tersebut tidak akan terpancang seumur hidup;
3. Perubahan tingkah laku tidak harus segera dapat diamati pada saat proses belajar sedang berlangsung, perubahan perilaku tersebut bersifat potensial;
4. Perubahan tingkah laku merupakan hasil latihan atau pengalaman;
5. Pengalaman atau latihan itu dapat member penguatan. Sesuatu yang memperkuat itu akan memberikan semangat atau dorongan untuk mengubah tingkah laku.[[22]](#footnote-23)

Senada dengan pernyataan Ngalim Purwanto, bahwa ada beberapa elemen penting yang mencirikan pengertian tentang belajar, antara lain:

1. Belajar merupakan suatu perubahan dalam tingkah laku, dimana perubahan itu dapat mengarah kepada tingkah laku yang lebih baik, tetapi juga ada kemungkinan mengarah kepada tingkah laku yang lebih buruk.
2. Belajar merupakan suatu perubahan yang terjadi melalui latihan atau pengalaman; dalam arti perubahan-perubahan yang disebabkan oleh pertumbuhan atau kematangan tidak dianggap sebagai hasil belajar; seperti perubahan-perubahan yang terjadi pada seorang bayi.
3. Untuk dapat disebut belajar, maka perubahan itu harus relatif mantap; harus merupakan akhir daripada suatu periode waktu yang cukup panjang. Berapa lama periode waktu itu berlangsung sulit ditentukan dengan pasti, tetapi perubahan itu hendaknya merupakan akhir dari suatu periode yang mungkin berlangsung berhari-hari, berbulan-bulan ataupun bertahun-tahun. Ini berarti kita harus mengenyampingkan perubahan-perubahan tingkah laku yang disebabkan oleh motivasi, kelelahan adaptasi, ketajaman perhatian atau kepekaan seseorang, yang biasanya hanya berlangsung sementara.
4. Tingkah laku yang mengalami perubahan karena belajar menyangkut berbagai aspek kepribadian, baik fisik maupun psikis, seperti: perubahan dalam pengertian, pemecahan suatu masalah/berpikir, keterampilan, kecakapan, kebiasaan, ataupun sikap.[[23]](#footnote-24)

Dari berbagai uraian diatas dapat disimpulkan bahwa ciri-ciri belajar adalah suatu aktivitas yang menghasilkan perubahan pada diri individu yang belajar, baik aktual maupun potensional dimana perubahan itu pada dasarnya berupa kemampuan baru, yang berlaku dalam waktu yang relatif lama yang terjadi karena suatu usaha.

1. **Prinsip-Prinsip Belajar**

Prinsip belajar adalah konsep-konsep yang harus diterapkan di dalam proses belajar mengajar. Seorang guru akan dapat melaksanakan tugasnya dengan baik apabila ia dapat menerapkan cara mengajar sesuai dengan prinsip-prinsip belajar.

Menurut Soekamto dan Winataputra ada beberapa prinsip dalam belajar, yaitu:

1. Apapun yang dipelajari siswa, dialah yang harus belajar, bukan orang lain. Untuk itu, siswalah yang harus bertindak aktif.
2. Setiap siswa belajar sesuai dengan tingkat kemampuannya.
3. Siswa akan dapat belajar dengan baik bila mendapat penguatan langsung pada setiap langkah yang dilakukan selama proses belajar.
4. Penguasaan yang sempurna dari setiap langkah yang dilakukan siswa akan membuat proses belajar lebih berarti.
5. Motivasi belajar siswa akan lebih meningkat apabila ia diberi tanggung jawab dan kepercayaan penuh atas belajarnya. [[24]](#footnote-25)

Jerome Bruner menekankan bahwa dalam belajar siswalah yang harus bertindak aktif dan guru hendaknya memberikan situasi masalah yang menstimulasi siswa untuk menemukan struktur masalah subyek untuk diri mereka sendiri.[[25]](#footnote-26) Ketika siswa benar-benar memahami struktur dasar, maka mereka akan mampu untuk mengungkapkan banyak ide-ide dari pengertian mereka sendiri.

Menurut Piaget belajar harus disesuaikan dengan tahap perkembangan kognitif yang dilalui siswa, yang dalam hal ini Piaget membaginya menjadi empat tahap, yaitu tahap sensori motor (ketika anak berumur 1,5 sampai 2 tahun), tahap pra-operasional (2/3 sampai 7/8 tahun), tahap operasional konkret (7/8 sampai 12/14 tahun), dan tahap operasional formal (14 tahun atau lebih).[[26]](#footnote-27) Dengan adanya tahapan ini diharapkan guru dalam mengajar memberikan materi pelajar sesuai dengan kemampuannya atau porsinya. Misalnya, mengajarkan konsep-konsep abstrak tentang operasi bilangan bulat kepada siswa kelas VII, tanpa adanya usaha untuk mengkonkretkan konsep-konsep tersebut. Tidak hanya percuma, tetapi justru akan lebih membingungkan para siswa itu.

1. **Hakikat Matematika**
2. **Definisi Matematika**

Sampai saat ini belum ada kesepakatan yang bulat di antara para matematikawan tentang apa yang disebut matematika itu. Sasaran Penelaahan Matematika tidaklan konkrit tetapi abstrak. Dengan mengetahui sasaran penelaahan matematika, kita dapat mengetahui hakekat matematika yang sekaligus dapat kita ketahui juga cara berfikir matematika itu.

Kalau kita telaah, matematika itu tidak hanya berhubungan dengan bilangan-bilangan serta operasi-operasinya, melainkan juga unsur ruang sebagai sasarannya. Kalau pengertian bilangan dan ruang ini dicakup menjadi satu istilah yang disebut kuantitas, maka matematika dapat didefinisikan sebagai ilmu yang mengenai kuantitas.[[27]](#footnote-28)

 Untuk mendeskripsikan definisi *matematika,* para matematikawan belum pernah mencapai satu titik puncak kesepakatan yang sempurna. Banyaknya definisi dan beragamnya deskripsi yang berbeda dikemukakan oleh para ahli mungkin disebabkan oleh *pribadi* (ilmu) matematika itu sendiri, dimana matematika termasuk salah satu disiplin ilmu yang memiliki kajian sangat luas, sehingga masing-masing ahli bebas mengemukakan pendapatnya tentang matematika berdasarkan sudut pandang, kemampuan, pemahaman, dan pengalamannya masing-masing.

James mengatakan dalam kamus matematikanya bahwa matematika itu adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep berhubungan lainnya yang jumlahnya banyak yang selanjutnya dibagi kedalam tiga bidang yaitu aljabar, analisis, dan geometri.[[28]](#footnote-29)

Johnson dan Rising berpendapat bahwa matematika itu adalah pola pikir, pola mengorganisasikan pembuktian yang logik; matematika itu adalah bahasa, bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, respresentasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai idea dari pada mengenai bunyi; matematika adalah pengetahuan struktur yang terorganisasikan, sifat-sifat atau teori-teori itu terbuat secara deduktif berdasarkan kepada unsur-unsur yang didefinisikan atau tidak, aksioma-aksioma, sifat-sifat, atau teori-teori yang telah dibuktikan kebenarannya; matematika itu adalah ilmu tentang pola, keteraturan pola atau idea; dan matematika itu adalah suatu seni, keindahannya terdapat pada keterurutan dan keeharmonisannya.[[29]](#footnote-30)

Menurut Reys matematika itu adalah telaahan tentang pola dan hubungan, suatu jalan atau pola berfikir, suatu seni, suatu bahasa, dan suatu alat.[[30]](#footnote-31) Kline (1973) mengatakan bahwa matematika itu bukan pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, tetapi beradanya itu terutama untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi dan alam.[[31]](#footnote-32)

Matematika, menurut Ruseffendi (1991), adalah bahasa simbol; ilmu deduktif yang tidak menerima pembuktian secara induktif; ilmu tentang pola keteraturan, dan struktur yang terorganisasi, mulai dari unsur yang tidak didefinisikan, ke unsur yang didefinisikan, ke aksioma atau postulat, dan akhirnya ke dalil. Sedangkan hakikat matematika menurut Soedjadi (2000), yaitu memiliki objek tujuan abstrak, bertumpu pada kesepakatan, dan pola piker yang deduktif.[[32]](#footnote-33)

Salah seorang matematikawan bernama W. W. Sawyer mengatakan bahwa matematika adalah klasifikasi studi dari semua kemungkinan pola. Pola di sini dimaksudkan adalah dalam arti luas, mencakup hampir semua jenis keteraturan yang dapat dimengerti pikiran kita.[[33]](#footnote-34)

Dari beberapa definisi matematika di atas, bisa dijadikan landasan awal untuk belajar dan mengajar dalam proses pembelajaran matematika. Diharapkan, proses pembelajaran matematika juga dapat dilangsungkan secara manusiawi. Sehingga matematika tidak dianggap lagi menjadi momok yang menakutkan bagi siswa: sulit, kering, bikin pusing, dan anggapan-anggapan negatif lainnya. Sepintas, anggapan ini dapat dibenarkan, sebab mereka belum memahami hakikat matematika secara utuh dan informasi yang mereka peroleh hanya parsial. Hal ini sebenarnya bukan salah siswa itu sendiri, melainkan karena kesalahan para guru yang memang tidak utuh dalam memberikan informasi tentang matematika. Hal ini bisa jadi disebabkan minimnya kemampuan guru di bidang itu, atau mungkin juga kesalahan dosen-dosen yang telah mendidik guru tersebut sewaktu di perguruan tinggi atau memang belum ada media informasi yang menyuguhkan tentang hal tersebut.

1. **Bahasa Matematika**

Bahasa merupakan suatu sistem yang terdiri dari lambang-lambang, kata-kata, dan kalimat-kalimat yang disusun menurut aturan tertentu dan digunakan sekelompok orang untuk berkomunikasi.

Bahasa tumbuh dan berkembang karena manusia, begitu pun sebaliknya, manusia berkembang karena bahasa. Keduanya tidak dapat dipisahkan. Keduanya menyatu dalam segala aktivitas kehidupan. Hubungan manusia dan bahasa merupakan dua hal yang tidak dapat dinafikan salah satunya. Bahasa pula yang membedakan manusia dengan makhluk ciptaan Tuhan yang lain.

Dilihat dari segi fungsi, bahasa memiliki dua fungsi. *Pertama,* sebagai alat untuk menyatakan ide, pikiran, gagasan atau perasaan. *Kedua,* sebagai alat untuk melakukan komunikasi dalam berinteraksi dengan orang lain.[[34]](#footnote-35) Apabila manusia dalam berinteraksi dan berkomunikasi tidak melibatkan peranan bahasa, maka itu tidak mungkin alias mustahil dilakukan. Komunikasi pada hakikatnya merupakan proses penyampaian pesan dari pengirim kepada penerima. Hubungan komunikasi dan interaksi antara si pengirim dan penerima, dibangun berdasarkan penyusunan kode atau simbol bahasa oleh pengirim dan pembongkaran idea tau simbol bahasa oleh penerima.

Memang salah satu alasan perlunya matematika diajarkan kepada siswa adalah matematika merupakan sarana komunikasi yang kuat, singkat dan jelas. Seperti yang diungkapkan Cockroft (1982) bahwa, matematika perlu diajarkan kepada siswa karena, 1) selalu digunakan dalam segala segi kehidupan; 2) semua bidang studi memerlukan keterampilan matematika yang sesuai; 3) merupakan sarana komunikasi yang kuat, singkat, dan jelas; 4) dapat digunakan untuk menyajikan informasi dalam berbagai cara; 5) meningkatkan kemampuan berpikir logis, ketelitian, dan kesadaran keruangan; dan 6) memberikan kepuasan terhadap usaha memecahkan masalah yang menantang.[[35]](#footnote-36)

Matematika adalah bahasa yang melambangkan serangkaian makna dari pernyataan yang ingin kita sampaikan. Matematika hanya merupakan kumpulan simbol dan rumus yang kering akan makna. Sehingga, tak heran jika banyak orang yang berkata bahwa *x, y, z* itu sama sekali tidak memiliki arti.

Untuk mengatasi kekurangan yang terdapat pada bahasa maka kita berpaling kepada matematika. Dalam hal ini dapat kita katakan bahwa matematika adalah bahasa yang berusaha untuk menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional dari bahasa verbal. Lambang-lambang dari matematika dibuat secara artifisial dan individual yang merupakan perjanjian yang berlaku khusus terkait dengan suatu permasalahan yang sedang dikaji. Suatu obyek yang sedang dikaji dapat disimbolkan dengan apa saja sesuai dengan kesepakatan kita.

Sebagai bahasa, matematika memang memiliki kelebihan jika dibandingkan dengan bahasa-bahasa lainnya. Bahasa matematika memiliki makna yang “tunggal”, sehingga suatu kalimat matematika tidak dapat ditafsirkan bermacam-macam. Bahasa yang dipakai dalam pergaulan sehari-hari sering mengandung kerancuan makna di dalamnya, yang timbul karena tekanan dalam mengucapkannya, ataupun karena kata yang digunakan dapat ditafsirkan dalam berbagai arti.

Bahasa matematika berusaha dan berhasil menghindari kerancuan arti, karena setiap kalimat (istilah atau variabel) dalam matematika sudah memiliki arti yang tertentu. Ketunggalan arti itu mungkin karena adanya kesepakatan matematikawan atau ditentukan sendiri oleh penulis di awal tulisannya. Dalam hal ini, orang dibebaskan untuk menggunakan istilah atau variabel matematika yang mengandung arti berlainan. Namun, dia harus menjelaskan terlebih dahulu di awal pembicaraannya atau tulisannya bagaimana tafsiran yang diinginkan tentang istilah matematika tersebut. Selanjutnya, dia harus taat dan tunduk menafsirkannya selama pembicaraan atau tulisan tersebut.

Bagi dunia keilmuan, matematika memiliki peran sebagai bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi yang cermat dan tepat. Matematika dalam hubungannya dengan komunikasi ilmiah mempunyai peran ganda, yakni sebagai ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu.

Sebagai ratu, matematika merupakan bentuk tertinggi dari logika. Hal ini juga diperkuat oleh pendapat Bertrand Russell, “Matematika adalah masa kedewasaan logika, sedangkan logika adalah masa kecil matematika”.[[36]](#footnote-37) Berdasarkan perkembangannya, masalah yang dihadapi logika makin lama makin rumit dan membutuhkan struktur analisis yang lebih sempurna. Dalam perspektif inilah, logika berkembang menjadi matematika.

Sedangkan di sisi lain, matematika sebagai pelayan ilmu, matematika memberikan bukan saja sistem pengorganisasian ilmu yang bersifat logis, tapi juga pernyataan-pernyataan dalam model matematik. Matematika bukan saja menyampaikan informasi secara jelas dan tepat, melainkan juga singkat. Suatu rumus yang jika ditulis dengan bahasa verbal membutuhkan rentetan kalimat yang banyak sekali, di mana makin banyak kata-kata yang dipergunakan makin besar pula peluang untuk terjadinya salah informasi dan salah interpretasi, maka dalam bahasa matematika cukup ditulis dengan model yang sederhana sekali.

Jadi, sejak awal kehidupan manusia matematika itu merupakan alat bantu untuk mengatasi berbagai macam permasalahan yang terjadi dalam kehidupan masyarakat. Baik itu permasalahan yang masih memiliki hubungan erat dalam kaitannya dengan ilmu eksak ataupun permasalahan-permasalahan yang bersifat sosial. Peranan matematika terhadap perkembangan sains dan teknologi sudah jelas, bahkan bisa dikatakan bahwa tanpa matematika sains dan teknologi tidak akan dapat berkembang.

Untuk dapat mendukung pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah, harus disusun konsep kurikulum matematika yang digunakan secara jelas dan terarah. Sehingga proses pembelajaran matematika dapat berjalan sesuai dengan yang diharapkan, dan yang lebih penting, pembelajaran matematika dapat digunakan untuk mendukung perkembangan sains dan teknologi, dan bidang-bidang lainnya.

1. **Karakteristik Umum Matematika**

Setelah membaca dan memahami uraian tentang definisi matematika di atas, seolah-olah tampak bahwa matematika merupakan pribadi yang mempunyai beragam corak penafsiran dan pandangan, yang mana antara matematikawan yang satu dengan lainnya memiliki pemahaman dan argumen yang berbeda untuk mendeskripsikan apa dan bagaimana sebenarnya matematika itu. Begitu juga dalam aliran filsafat matematika, ditemukan terdapat tiga aliran besar yang memengaruhi perkembangan matematika yang sampai sekarang pun belum ditemukan pengerucutan tentang pendeskripsian matematika.

Tetapi, dibalik keragaman itu semua, dalam setiap pandangan matematika terdapat beberapa ciri matematika yang secara umum disepakati bersama. Diantaranya adalah sebagai berikut:[[37]](#footnote-38)

1. **Memiliki Objek Kajian yang Abstrak**

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap yang abstrak adalah matematika. Sementara beberapa matematikawan menganggap objek matematika itu “konkret” dalam pikiran mereka, maka kita dapat menyebut objek matematika secara lebih tepat sebagai objek mental atau pikiran. Ada empat objek kajian matematika, yaitu *fakta, operasi* atau *relasi, konsep,* dan *prinsip.*

1. Fakta

Fakta adalah pemufakatan atau konvensi dalam matematika yang biasanya diungkapkan melalui simbol-simbol tertentu.[[38]](#footnote-39)

 *Contoh:*

Simbol “2” secara umum telah dipahami sebagai simbol untuk bilangan “dua”. Sebaliknya, bila kita menghendaki bilangan dua, maka cukup dengan menggunakan simbol “2”. Fakta lain dapat terdiri atas rangkaian simbol, misalnya “3 + 4” yang dipahami sebagai “tiga tambah empat”. Demikian juga “3 x 5 = 15” adalah fakta yang dipahami sebagai “tiga kali lima adalah limabelas”. Fakta yang agak lebih komplek adalah “3 x 5 = 5 + 5 + 5 = 15”.

Maka dalam memperkenalkan simbol atau fakta matematika kepada siswa, guru seharusnya melalui beberapa tahap yang memungkinkan siswa dapat menyerap makna dari simbol-simbol tersebut. Dalam hal ini, pendekatan *enaktif-ikonik-simbolik* dari Jerome Bruner dapat diterapkan. Mereka bahkan dapat menggunakan simbol-simbol pilihan mereka sendiri. Hal ini dipikirkan sebagai suatu cara untuk menjaga partisipasinya dalam proses penemuan dan formalisasi pengalaman matematika. Hal tersebut juga untuk menjaga pengalaman belajar dari sekadar hanya latihan mengingat.

1. Konsep

Konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep atau bukan.

*Contoh:*

“Segitiga” adalah nama suatu konsep. Dengan konsep itu, kita dapat membedakan mana yang merupakan contoh segitiga dan mana yang bukan contoh segitiga. “Bilangan prima” juga nama suatu konsep, yang dengan konsep itu kita dapat membedakan mana yang merupakan bilangan prima dan mana yang bukan. Konsep “bilangan prima” lebih kompleks dari konsep “segitiga”, oleh karena di dalam konsep “bilangan prima” memuat konsep-konsep lain seperti “faktorisasi”, “bilangan”, “satu”, dan lain-lain. Di samping itu, dalam matematika terdapat konsep-konsep yang penting, seperti “fungsi” dan “variabel”. Selain itu, terdapat pula konsep-konsep yang lebih kompleks, seperti “matriks”, “determinan”, “periodik”, “gradien”, “vektor”, “group”, dan “bilangan phi”.

1. Operasi atau Relasi

Operasi adalah pengerjaan hitung, pengertian aljabar, dan pengerjaan matematika lainnya. Sementara relasi adalah hubungan antara dua atau lebih elemen.

*Contoh:*

Contoh operasi antara lain: “penjumlahan”, “perpangkatan”, “gabungan”, “irisan”, dan lain-lain. Sedang relasi antara lain: “sama dengan”, “lebih kecil”, dan lain-lain.

1. Prinsip

Prinsip adalah objek matematika, yang terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara sederhana, dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan di antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa “aksioma”, “teorema” atau “dalil”, “corollary” atau sifat, dan sebagainya.[[39]](#footnote-40)

*Contoh:*

Sifat komutatif dan sifat asosiatif dalam aritmetika merupakan suatu prinsip. Begitu pula dengan Teorema Pythagoras. Contoh sebuah aksioma antara lain “melalui satu titik A di luar sebuah garis *g* dapat dibuat tepat sebuah garis yang sejajar garis *g*”.

Siswa dapat dianggap telah memenuhi suatu prinsip bila ia memahami bagaimana prinsip tersebut dibentuk dan dapat menggunakannya dalam situasi yang cocok. Bila demikian, berarti ia telah memahami fakta, konsep, atau definisi serta operasi atau relasi yang termuat dalam prinsip tersebut.

1. **Bertumpu pada Kesepakatan**

Simbol-simbol dan istilah-istilah dalam matematika merupakan kesepakatan atau konvensi yang penting. Dengan simbol dan istilah yang telah disepakati dalam matematika, maka pembahasan selanjutnya akan menjadi mudah dilakukan dan dikomunikasikan.

*Contoh:*

1. Lambang bilangan yang digunakan sekarang: 1, 2, 3, dan seterusnya merupakan contoh sederhana dari sebuah kesepakatan dalam matematika. Siswa secara tidak sadar menerima kesepakatan itu ketika mulai mempelajari tentang angka atau bilangan. Termasuk pula penggunaan kata “satu” untuk lambang “1”, atau “sama dengan” untuk lambang “=” juga merupakan kesepakatan.
2. Istilah “fungsi” kita batasi pengertiannya sebagai pemetaan yang mengawankan setiap elemen dari himpunan yang tepat satu ke sebuah elemen dari himpunan yang lain. Mengapa harus menggunakan kata “tepat satu”? Penggunaan kata “tepat satu” merupakan contoh kesepakatan dalam matematika. Bila ada pemetaan yang bernilai ganda, berarti bukan termasuk fungsi.

Dalam matematika, kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian) dan konsep primitif (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan). Aksioma yang diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pembuktian. Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pendefinisian.

Aksioma dapat diklasifikasikan menjadi 2 jenis: 1) aksioma yang bersifat “*self evident truth*”, yaitu bila kebenarannya langsung terlihat dari pernyataannya, dan 2) aksioma yang bersifat “*non-self evident truth*”, yaitu pernyataan yang mengaitkan fakta dan konsep lewat suatu relasi tertentu. Bentuk terakhir ini lebih terlihat sebagai sebuah kesepakatan saja.

1. **Berpola Pikir Deduktif**

Dalam matematika, hanya diterima pola pikir yang bersifat deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus. Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana, tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.

*Contoh:*

Seorang siswa telah memahami konsep dari “lingkaran”. Ketika berada di dapur, ia dapat menggolongkan mana peralatan dapur yang berbentuk lingkaran dan mana yang bukan lingkaran. Dalam hal ini, siswa tersebut telah menggunakan pola pikir deduktif secara sederhana ketika menunjukkan suatu peralatan yang berbentuk lingkaran.

1. **Konsisten dalam Sistemnya**

Dalam matematika, terdapat berbagai macam sistem yang dibentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang berkaitan, ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan yang lainnya. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat pula beberapa sistem lain yang lebih “kecil” yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula di dalam sistem geometri.

*Contoh:*

Di dalam aljabar terdapat sistem aksioma dalam group, sistem aksioma dalam ring, sistem aksioma dalam lapangan (*field*), dan lain-lain. Di dalam geometri insidensi, sistem geometri Euclid, sistem geometri Lobachevski, dan lain-lain.

Di dalam masing-masing sistem, berlaku ketaatasasan atau konsistensi. Artinya, dalam setiap sistem tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema ataupun definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu baik dalam makna maupun dalam hal nilai kebenarannya. Antara sistem atau struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pernyataan yang saling kontradiksi.

1. **Memiliki Simbol yang Kosong Arti**

Di dalam matematika, banyak sekali simbol baik yang berupa huruf latin, huruf Yunani, maupun simbol-simbol khusus lainnya. Simbol-simbol tersebut membentuk kalimat dalam matematika yang biasa disebut model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Selain itu, ada pula model matematika yang berupa gambar seperti bangun-bangun geometrik, grafik, maupun diagram.

*Contoh:*

Model matematika, seperti x + y = z tidak selalu berarti bahwa x, y, dan z berarti bilangan. Secara sederhana, bilangan-bilangan yang biasa digunakan dalam pembelajaran pun bebas dari arti atau makna real. Bilangan tersebut dapat berarti panjang, jumlah barang, volume, nilai uang, dan lain-lain tergantung pada konteks penerapan bilangan tersebut.

1. **Memerhatikan Semesta Pembicaraan**

Sehubungan dengan kosongnya arti dari simbol-simbol matematika, bila digunakan haruslah memerhatikan lingkup pembicaraan. Lingkup atau sering disebut semesta pembicaraan bisa sempit bisa pula luas. Bila berbicara tentang bilangan-bilangan, maka simbol-simbol tersebut menunjukkan bilangan-bilangan pula. Begitu pula jika berbicara tentang transformasi geometris (seperti translasi, rotasi, dan lain-lain), maka simbol-simbol matematikanya menunjukkan suatu transformasi pula. Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaiannya suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan.

*Contoh:*

Dalam semesta himpunan bilangan bulat, terdapat model 2x = 3. Adakah penyelesaiannya? Apabila diselesaikan dengan menggunakan cara biasa tanpa menghiraukan semesta pembicaraannya, maka diperoleh x = 1,5. Tetapi 1,5 bukan termasuk bilangan bulat. Jadi, dalam hal ini dapat dikatakan bahwa model tersebut tidak memilki penyelesaian dalam semesta pembicaraan bilangan bulat. Atau dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai “himpunan kosong”.

1. **Karakteristik Matematika Sekolah**

Sehubungan dengan karakteristik umum matematika di atas, dalam pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah harus memerhatikan ruang lingkup matematika sekolah. Ada sedikit perbedaan antara matematika sebagai “ilmu” dengan matematika sekolah, perbedaan itu dalam hal: 1) penyajian, 2) pola pikir, 3) keterbatasan semesta, 4) tingkat keabstrakan.

1. Penyajian

Penyajian matematika tidak harus diawali dengan teorema maupun definisi, tetapi haruslah disesuaikan dengan perkembangan intelektual siswa. Pembelajaran matematika di sekolah yang dilakukan dengan pendekatan secara induktif atau konkret sudah harus dikurangi, kecuali pada topik-topik yang memerlukan bantuan yang agak konkret, seperti teori peluang.

*Contoh:*

Pengertian perkalian seharusnya tidak langsung menyajikan bentuk matematika, misalnya 3 × 4 = 12. Penyajiannya hendaknya didahului dengan melakukan penjumlahan berulang dengan memanfaatkan alat peraga, seperti kelereng. Dengan peragaan itu, siswa akan memperoleh pemahaman bahwa walaupun 3 × 4 dan 4 × 3 bernilai sama-sama 12, tetapi makna perkaliannya berbeda. Setelah siswa memahami makna perkalian, barulah diminta menghafalkan fakta dasar perkalian.

1. Pola pikir

Pembelajaran matematika sekolah dapat menggunakan pola pikir deduktif maupun pola piker induktif. Hal ini harus disesuaikan dengan topik bahasan dan tingkat intelektual siswa. Sebagai kriteria umum, biasanya di SD menggunakan pendekatan induktif lebih dulu, karena hal ini lebih memungkinkan siswa menangkap pengertian yang dimaksud. Sementara untuk SMP dan SMA, pola pikir deduktif sudah semakin ditekankan. Contoh-contoh yang disajikan sebelumnya juga menunjukkan pola pikir yang digunakan di sekolah.

1. Semesta pembicaraan

Sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual siswa, matematika yang disajikan dalam jenjang pendidikan juga menyesuaikan dalam kekomplekan semestanya; semakin meningkat tahap perkembangan intelektual siswa, semesta matematikanya pun semakin diperluas.

*Contoh:*

1. Sehubungan dengan keterbatasan semesta bilangan, di SMP belum diperkenalkan tentang bilangan imajiner atau kompleks. Hal ini juga berimplikasi pada penyelesaian soal matematika yang dibatasi pada himpunan bilangan real.
2. Di sekolah, bilangan prima dibatasi pengertiannya hanya pada bilangan asli. Siswa belum diperkenalkan pada perluasan semesta kepada bilangan prima negatif. Begitu pula topik geometri masih dibatasi pada geometri Euclid.
3. Tingkat keabstrakan

Seperti pada poin sebelumnya, tingkat keabstrakan matematika juga harus menyesuaikan dengan tingkat perkembangan intelektual siswa. Di sekolah, dimungkinkan untuk mengkonkretkan objek-objek matematika agar siswa lebih memahami pelajaran. Namun, semakin tinggi jenjang sekolah, tingkat keabstrakan objek semakin diperjelas.

*Contoh:*

1. Dalam pembelajaran fakta mengenai bilangan di SD, siswa tidak langsung diperkenalkan simbol, “1”, “2”, “3”, “4”, ... beserta sifat urutannya, tetapi dimulai dengan menggunakan benda-benda konkret dan menyuguhkan sifat urutan/relasi sebagai sifat “lebih banyak” atau “kurang banyak”.
2. Dalam membuktikan teorema phytagoras, siswa tidak langsung diarahkan pada bukti deduktif yang bersifat abstrak/formal dengan menggunakan lambang-lambang aljabar. Bukti secara geometris akan sangat membantu siswa untuk memahami Teorema Phytagoras dan kebenarannya. Banyak sekali bukti Teorema Phytagoras secara geometri yang cukup menarik dan mudah dimengerti siswa.
3. **Belajar Matematika dengan Pemahaman**

Matematika merupakan suatu ilmu yang berhubungan dengan penelaahan bentuk-bentuk atau struktur-struktur yang abstrak dan hubungan di antara hal-hal itu. Untuk dapat memahami struktur serta hubungan-hubungannya diperlukan penguasaan tentang konsep-konsep yang terdapat dalam matematika. Sehingga belajar matematika adalah belajar konsep dan struktur yang terdapat dalam bahan-bahan yang sedang dipelajari, serta mencari hubungan di antara konsep dan struktur tersebut.

 Menurut Hudojo belajar matematika berkenaan dengan ide-ide (gagasan-gagasan), aturan-aturan, dan hubungan-hubungan yang diatur secara logis sehingga pengkajian berkaitan dengan konsep-konsep abstrak.[[40]](#footnote-41) Sedangkan Jerome Bruner mengatakan bahwa belajar matematika adalah belajar tentang konsep-konsep dan struktur-struktur matematika yang terdapat di dalam materi yang dipelajari serta mencari hubungan-hubungan antara konsep-konsep dan struktur-struktur matematika itu.[[41]](#footnote-42)

Karena matematika berkaitan dengan ide-ide, gagasan, aturan dan hubungan yang diatur secara logis, maka seseorang yang belajar matematika harus mencapai pemahaman agar dirasakan manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Pemahaman merupakan suatu proses pengetahuan atau informasi yang baru diterima oleh seseorang dan dapat dihubungkan dengan pengetahuan yang telah dimiliki atau pada diri orang tersebut.

Hiebert dan Carpenter menyatakan bahwa pemahaman matematika memerlukan suatu proses untuk menempatkan secara tepat informasi atau pengetahuan yang sedang dipelajari ke dalam jaringan internal dari representasi pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya di dalam struktur kognitif siswa.[[42]](#footnote-43) Agar proses internalisasi terjadi secara sungguh-sungguh (yang berarti proses belajar secara optimal), dilakukan dengan memperhatikan tahap-tahap enaktif, ikonik dan simbolik.[[43]](#footnote-44) Misalnya untuk memberikan pemahaman kepada siswa tentang konsep penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, maka perlu benda konkret (alat peraga garis bilangan dan mainan katak) pada tahapan enaktif, tahap ikonik dengan menggunakan gambar atau grafik (alat peraga digambarkan), dan tahap simbolik dengan menggunakan simbol-simbol matematika (tanpa alat peraga maupun gambar). Diantara jenis pengetahuan yang dipelajari dalam matematika meliputi, 1) pengetahuan konseptual, dan 2) pengetahuan prosedural. Pengetahuan konseptual mengacu pada pemahaman, sedangkan pengetahuan prosedural mengacu pada keterampilan melakukan sesuatu prosedur pengajaran.

Untuk membuat siswa belajar matematika dengan pemahaman, guru hendaknya merencanakan dan melaksanakan pembelajaran matematika yang melibatkan siswa aktif dalam belajar, baik secara mental, fisik, maupun social. Dalam penerapan Teori Bruner berbasis ICT, secara konseptual siswa mampu memahami konsep operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat melalui tahap enaktif dan ikoniknya. Sedangkan secara prosedural siswa mampu menggunakan simbol-simbol matematika tanpa bantuan benda konkrit maupun gambar dalam menyelesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat (tahap simbolik Teori Bruner).

1. **Teori Belajar Bruner**

Bruner yang memiliki nama lengkap Jerome S Bruner adalah seorang ahli psikologi dari Universitas Harvard, Amerika Serikat, telah mempelopori aliran psikologi kognitif yang memberi dorongan agar pendidikan memberikan perhatian pada pentingnya pengembangan berfikir. Bruner banyak memberikan pandangan mengenai perkembangan kognitif manusia, bagaimana manusia belajar, atau memperoleh pengetahuan dan mentransformasi pengetahuan. Dasar pemikiran teorinya memandang bahwa manusia sebagai pemproses, pemikir dan pencipta informasi. Bruner menyatakan belajar merupakan suatu proses aktif yang memungkinkan manusia untuk menemukan hal-hal baru di luar informasi yang diberikan kepada dirinya.

Bruner (1990) berpendapat bahwa belajar matematika adalah belajar tentang konsep-konsep dan struktur-struktur matematika yang terdapat di dalam materi yang dipelajari serta mencari hubungan-hubungan antara konsep-konsep dan struktur-struktur matematika itu.[[44]](#footnote-45) Pemahaman terhadap konsep dan struktur sesuatu materi itu dipahami secara lebih komprehensif. Lain dari itu peserta didik lebih mudah mengingat materi itu bila yang dipelajari itu merupakan pola yang terstruktur. Dengan memahami konsep dan struktur akan mempermudah terjadinya internalisasi pengetahuan (transfer informasi) ke dalam jaringan kognitif siswa.

Menurut Bruner, perkembangan kognitif seseorang terjadi melalui tida tahap yang ditentukan oleh caranya melihat lingkungan, yaitu: (1) Tahap Enaktif (*Enactive*), (2) Tahap Ikonik (*Iconic*), (3) Tahap Simbolik (*Symbolic*).[[45]](#footnote-46)

1. Tahap Enaktif (*Enactive*)

Pada tahap ini seseorang melakukan aktivitas-aktivitas dalam upayanya memahami lingkungan sekitarnya. Artinya dalam memahami dunia sekitarnya anak menggunakan pengetahuan motorik. Anak melakukan observasi dengan cara mengalami secara langsung suatu realitas. Misalnya melalui gigitan, sentuhan, pegangan dan lain sebagainya.

1. Tahap Ikonik (*Iconic*)

Pada tahap ini, seseorang memahami objek-objek atau dunianya melalui gambar-gambar dan visualisasi verbal. Artinya, dalam memahami dunia sekitarnya anak belajar melalui bentuk perumpamaan (tampil) dan perbandingan (komparasi)

1. Tahap Simbolik (*Symbolic*)

Pada tahap terakhir ini seseorang telah mampu memiliki ide-ide atau gagasan-gagasan abstrak yang sangat dipengaruhi oleh kemampuanya dalam berbahasa dan logika. Dalam memahami dunia sekitarnya anak belajar melalui simbol-simbol bahasa, logika, matematika dan sebagainya. Komunikasi dilakukan dengan menggunakan banyak sistem simbol. Semakin matang seseorang dalam proses berfikirnya, semakin dominan sistem simbolya.

Ketiga tahapan belajar di atas memperjelas bahwa untuk memudahkan pemahaman dan keberhasilan anak dalam pembelajaran matematika, haruslah pembelajaran tersebut dilakukan secara bertahap. Sebenarnya ketiga tahapan belajar dari Bruner ini sudah sejak lama diterapkan dalam pembelajaran matematika di Sekolah, misalnya seperti berikut ini.

1. Tahap Enaktif. Setiap kita melakukan pembelajaran tentang konsep, fakta atau prosedur dalam matematika yang bersifat abstrak biasanya diawali dari persoalan sehari-hari yang sederhana (peristiwa di dunia sekitarnya), atau menggunakan benda-benda real/nyata/fisik (model konkret).

*Contoh*:

 “Farid mempunyai 3 bola, diberi lagi 2 bola oleh Kakaknya, berapa banyaknya bola Farid sekarang?”



 + =

**Gambar 2.1**

Jadi bola Farid sekarang berjumlah 5

1. Tahap Ikonik. Setelah memanipulasi benda secara nyata melalui persoalan keseharian dari dunia sekitarnya, dilanjutkan dengan membentuk modelnya sebagai bayangan mental dari benda atau peristiwa keseharian tersebut. Model (model matematika) disini berupa gambaran dari bayangan (model semi konkret atau model semi abstrak).

*Contoh:*

2 + 3 = 5

 2 3



 -1 0 -1 -2 -3 -4 5 6

**Gambar 2.2**

1. Tahap Simbolik. Pada tahap ini menggunakan simbol-simbol (lambing-lambang) yang bersifat abstrak sebagai wujud dari bahasa matematika (model abstrak).

*Contoh:*

3 bola + 2 bola = … bola

3 + 2 = n

n = 5

1. **Konsep Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat di Sekolah**

Konsep adalah suatu kelas atau kategori objek-objek yang memiliki ciri-ciri umum.[[46]](#footnote-47) Soedjadi mengungkapkan bahwa konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau kejadian-kejadian tertentu, apakah objek-objek atau kejadian-kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh.[[47]](#footnote-48)

Penjumlahan dan pengurangan adalah salah satu bentuk pengerjaan atau operasi hitung. Penjumlahan adalah operasi hitung jumlah atau pengerjaan hitung jumlah (menambahkan), sedangkan pengurangan adalah operasi hitung kurang atau pengerjaan hitung kurang.[[48]](#footnote-49)

Pada penjumlahan, yang akan dicari adalah jumlahnya. Misalkan, 4 + 3 = , simbol “ 4 dan 3” merupakan objek-objek yang dijumlah dan simbol “” merupakan jumlahnya. Sedangkan pada pengurangan, yang akan dicari adalah selisihnya. Misalkan, 5 – 3 = ◊, simbol “5” merupakan objek yang dikurangi, simbol “3” merupakan objek pengurang, dan simbol “◊” merupakan selisihnya.

Bilangan bulat adalah ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, .... Bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif dan bilangan nol. Bilangan bulat dapat ditunjukkan dengan anak panah pada garis bilangan. Semua bilangan di sebelah kiri nol adalah bilangan negatif dan semua bilangan di sebelah kanan nol adalah bilangan positif.

           

 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

Bilangan bulat negatif Nol Bilangan bulat positif

**Gambar 2.3**

Bilangan bulat diciptakan untuk menjawab masalah seperti $3+n=0$ atau $7+n=5$, karena tidak ada bilangan cacah yang memenuhi sehingga pernyataan tersebut menjadi benar. Hal ini menunjukkan pengetahuan tentang bilangan cacah saja belum cukup untuk memecahkan masalah. Karena itu manusia membutuhkan pengetahuan yang lebih untuk dapat menyelesaikan permasalahan di atas, yaitu dengan bilangan bulat.

Penjumlahan bilangan bulat dapat ditunjukkan dengan anak-anak panah pada garis bilangan.

***Contoh 1:*** 4 + 2 = n 4

n = 6 2

 n

-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

***Contoh 2:*** 2 + (-5) = n 2

n = -3 -5

 n

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

Konsep pengurangan bilangan bulat dapat dilihat dari kalimat penjumlahan berikut: 10 + (-6) = n, dimana dengan pertolongan diagram anak panah garis bilangan dapat diperoleh n = 4. Selanjutnya perhatikan kalimat pengurangan 10 – 6 = n, dimana kalimat ini benar untuk n = 4. Sehingga 10 – 6 = 4. Jadi 10 – 6 = 10 + (-6). Karena -6 adalah lawan dari 6, maka dapat diperoleh hasil berikut: mengurangi 10 dengan 6 sama artinya dengan menambah 10 dengan lawan 6. Secara umum mengurangi *a* dengan *b* sama saja dengan menambah *a* dengan lawan *b*.Jadi, $a-b=a+\left(-b\right).$

***Contoh:***

1. Carilah 5 – 12 = n.

***Jawab:*** mengurangi 5 dengan 12 sama artinya dengan menambah 5 dengan lawan 12, jadi 5 – 12 = 5 + (-12). Dengan diagram panah garis bilangan diperoleh 5 + (-12) = -7. Jadi n = -7

1. Carilah -7 – 8 = n.

***Jawab:*** mengurangi -7 dengan 8 sama artinya dengan menambah -7 dengan lawan 8, jadi -7 – 8 = -7 + (-8). Dengan diagram panah garis bilangan diperoleh -7 + (-8) = -15. Jadi n = -15

1. <http://hendradp.wordpress.com/> diakses tanggal 02 juni 2011 [↑](#footnote-ref-2)
2. *Ibid* [↑](#footnote-ref-3)
3. *Ibid* [↑](#footnote-ref-4)
4. <http://hendradp.wordpress.com/> diakses tanggal 02 juni 2011 [↑](#footnote-ref-5)
5. *Ibid* [↑](#footnote-ref-6)
6. Hamzah B. Uno dan Nina Lamatenggo, *Teknologi……*, hal.21 [↑](#footnote-ref-7)
7. *Ibid*, hal. 21 [↑](#footnote-ref-8)
8. *Ibid*, hal. 21 [↑](#footnote-ref-9)
9. *Ibid.* hal. 22 [↑](#footnote-ref-10)
10. Umar Tirtarahardja dan S.L.La Sulo, *Pengantar…..*, hal. 34 [↑](#footnote-ref-11)
11. *Ibid*, hal 37 [↑](#footnote-ref-12)
12. Umar Tirtarahardja dan S.L.La Sulo, *Pengantar…..*, hal. 37 [↑](#footnote-ref-13)
13. www. <http://vikhi.com/2010/02/28/dampak-negatif-kemajuan-teknologi-komunikasi> diakses 25 juni 2011 [↑](#footnote-ref-14)
14. *Ibid* [↑](#footnote-ref-15)
15. *Ibid* [↑](#footnote-ref-16)
16. Bambang warsita, *Teknologi…….*, hal. 10 [↑](#footnote-ref-17)
17. Bambang warsita, *Teknologi…….*,, Hal. 15 [↑](#footnote-ref-18)
18. Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum Matematika dan Pelaksanaannya di depan Kelas,* (Usaha Nasional: Surabaya, 1979), hal 107 [↑](#footnote-ref-19)
19. *Ibid*, hal 108 [↑](#footnote-ref-20)
20. Herman Hudojo,*Strategi……*, Hal 2 [↑](#footnote-ref-21)
21. M. Dalyono, *Psikologi Pendidikan,* (Jakarta: Rineka Cipta, 2007), hal. 212-213 [↑](#footnote-ref-22)
22. Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran*, (Jogjakarta: Ar-Ruzz Media, 2007), hal. 15-16 [↑](#footnote-ref-23)
23. M. Ngalim Purwanto, *Psikologi Pendidikan,* (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2004), hal. 85 [↑](#footnote-ref-24)
24. Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran…*, hal. 16 [↑](#footnote-ref-25)
25. Anita E. Woolfolk & Lorrance McCune-Nicolich, *Mengembangkan Kepribadian & Kecerdasan (Psikologi Pembelajaran I),* (Jakarta: Inisiasi Press, 2004), hal. 309 [↑](#footnote-ref-26)
26. Prasetya Irawan, dkk., *Teori Belajar, Motivasi, dan Keterampilan Mengajar,* (Jakarta: PAU-PPAI, 1996), hal. 9 [↑](#footnote-ref-27)
27. Herman Hudojo, *Strategi………*, Hal 2 [↑](#footnote-ref-28)
28. E.T. Ruseffendi, *Pengajaran Matematika Modern dan Masa Kini*, (Bandung: Tarsito, 1990), Hal 1 [↑](#footnote-ref-29)
29. E.T. Ruseffendi, *Pengajaran Matematika………*, Hal 2 [↑](#footnote-ref-30)
30. Ibid., Hal 2 [↑](#footnote-ref-31)
31. Ibid., Hal 2 [↑](#footnote-ref-32)
32. Heruman, *Model Pembelajaran Matematika Di Sekolah Dasar,* (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2007), hal. 1. [↑](#footnote-ref-33)
33. Herman Hudojo, *Strategi mengajar……*, hal. 62. [↑](#footnote-ref-34)
34. Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence……,* hal. 45. [↑](#footnote-ref-35)
35. Mulyono Abdurrahman, *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar,* (Jakarta: Rineka Cipta, 1999), hal. 253 [↑](#footnote-ref-36)
36. Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer,*(Jakarta: Pustaka Sinar Harapan, 2003), hal. 199 [↑](#footnote-ref-37)
37. Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika……,* hal. 59. [↑](#footnote-ref-38)
38. R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia,* (Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional, 1999), hal. 13. [↑](#footnote-ref-39)
39. R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia…,* hal. 14 [↑](#footnote-ref-40)
40. Herman Hudojo, *Pengembangan* *Kurikulum Matematika dan pelaksanaannya...,* hal. 96 [↑](#footnote-ref-41)
41. Herman Hudojo, *Strategi mengajar belajar matematika...,* hal. 48 [↑](#footnote-ref-42)
42. <http://abdussakir.wordpress.com>, diakses tanggal 25 Mei 2011 [↑](#footnote-ref-43)
43. Nely Machmud, *Perbandingan Teori Bruner dan Teori Belajar Gagne,* [www.manmodelgorontalo.com](http://www.manmodelgorontalo.com), diakses tanggal 25 Mei 2011 [↑](#footnote-ref-44)
44. Herman Hudojo, *Strategi mengajar belajar matematika...,* hal. 48 [↑](#footnote-ref-45)
45. C. Asri Budiningsih, *Belajar dan …..,* Hal 41 [↑](#footnote-ref-46)
46. Oemar Hamalik, *Perencanaan Pengajaran Berdasarkan Pendekatan Sistem,* (Jakarta: PT Bumi Aksara, 2006), hal. 162 [↑](#footnote-ref-47)
47. R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia...,* hal. 14 [↑](#footnote-ref-48)
48. E.T. Ruseffendi, *Pengajaran Matematika…..*, hal. 1 [↑](#footnote-ref-49)